

# 2006 年度 数値解析 レポート課題その 2

2006 年 12 月 28 日

## 問 1

$$I = \int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{y+3} dy = \frac{4\sqrt{2}-2}{3} = 1.2189514\dots$$

### (1)

DE 公式を用いて複合台形則によって、積分値  $I$  の近似値  $Th$  を計算した。(積分区間は  $[-3.3, 3.3]$ ) その結果を表 1 に示す。刻み幅  $h = h_0 = 3.3/2$  のとき、真値との差  $|Th - I|$  は 0.3810052 である。

表 1 DE 公式による数値計算の結果

	$h$	$Th$	$ Th - I $
$h_0$	1.65	1.5999566	0.3810052
$\frac{h_0}{2}$	0.825	1.2234389	0.0044875
$\frac{h_0}{2^2}$	0.4125	1.2189517	0.0000002
$\frac{h_0}{2^3}$	0.20625	1.2189514	2.220D-16
$\frac{h_0}{2^4}$	0.103125	1.2189514	0

### (2)

真値との差  $|Th - I|$  は  $h$  について、0.3810052, 0.0044875, 0.0000002, 2.220D-16,... と多項式的にはなく、指数的に減少している。(DE 公式を用いたため収束が速くなったと考えられる。)

## 問 2

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad f'(1) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$M_h = \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h}$$

(1)

Taylor 展開より

$$f(1+h) = f(1) + f'(1)h + \frac{f''(1)}{2!}h^2 + \frac{f'''(1)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}h^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}h^5 + O(h^6)$$

$$f(1-h) = f(1) - f'(1)h + \frac{f''(1)}{2!}h^2 - \frac{f'''(1)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}h^4 - \frac{f^{(5)}(1)}{5!}h^5 + O(h^6)$$

したがって

$$\begin{aligned} M_h &= \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2h} \left\{ 2f'(1)h + 2\frac{f'''(1)}{3!}h^3 + 2\frac{f^{(5)}(1)}{5!}h^5 + O(h^7) \right\} \\ &= f'(1) + \frac{f'''(1)}{3!}h^2 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}h^4 + O(h^6) \\ &= f'(1) + \frac{1}{2^6\sqrt{2}}h^2 + \frac{7}{2^{12}\sqrt{2}}h^4 + O(h^6) \\ &= f'(1) + \alpha h^2 + \beta h^4 + O(h^6) \end{aligned}$$

(ただし、 $\alpha = \frac{1}{2^6\sqrt{2}}, \beta = \frac{7}{2^{12}\sqrt{2}}$ )

故に

$$M_h - f'(1) = \alpha h^2 + \beta h^4 + O(h^6)$$

(2)

$M_h$  の計算結果は表 2 に示してある。

また  $R(h)$  として、

$$R(h) \equiv \frac{M_h - M_{\frac{h}{2}}}{M_{\frac{h}{2}} - M_{\frac{h}{2^2}}}$$

表 2 中心差分近似による数値計算の結果

	$h$	$M_h$
$h_0$	0.1	0.353664
$\frac{h_0}{2}$	0.05	0.3535810
$\frac{h_0}{2^2}$	0.025	0.3535603
$\frac{h_0}{2^3}$	0.0125	0.3535551
$\frac{h_0}{2^4}$	0.00625	0.3535538
$\frac{h_0}{2^5}$	0.003125	0.3535535

とすると、(1) の結果より、 $h$  が十分小さければ

$$R(h) = \frac{\frac{3}{4}\alpha h^2 + O(h^4)}{\frac{3}{4 \cdot 4}\alpha h^2 + O(h^4)} \simeq 4$$

そして、実際

$$\begin{aligned} R(h_0) &= 4.0041081 \\ R\left(\frac{h_0}{2}\right) &= 4.0010258 \\ R\left(\frac{h_0}{2^2}\right) &= 4.0002564 \\ R\left(\frac{h_0}{2^3}\right) &= 4.0000637 \end{aligned}$$

$R(h)$  の値は約 4 である。

(3)

(1) より

$$M_h - f'(1) = \alpha h^2 + \beta h^4 + O(h^6)$$

であるから、 $4M_{\frac{h}{2}} - M_h$  を考えれば

$$\begin{aligned} 4M_{\frac{h}{2}} - M_h &= 4 \left\{ f'(1) + \alpha \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \beta \left(\frac{h}{2}\right)^4 + O(h^6) \right\} - \{ f'(1) + \alpha h^2 + \beta h^4 + O(h^6) \} \\ &= 3f'(1) - \frac{3}{4}\beta h^4 + O(h^6) \\ \frac{4M_{\frac{h}{2}} - M_h}{3} &= f'(1) - \frac{\beta}{4}h^4 + O(h^6) \end{aligned}$$

したがって

$$M_h^{(1)} \equiv \frac{4M_{\frac{h}{2}} - M_h}{3} = f'(1) - \frac{\beta}{4}h^4 + O(h^6)$$

とすればよく。このとき  $M_h^{(1)} = f'(1) + O(h^4)$  である。

(4)

(3) より、 $M_h^{(1)} = \frac{4M_{\frac{h}{2}} - M_h}{3}$  として、各  $M_h^{(1)}$  を計算する。その結果を表3に示した。

表3 Richardson 加速を行った  $M_h^{(1)}$

	$h$	$M_h^{(1)}$
$\frac{h_0}{2}$	0.05	0.3535534
$\frac{h_0}{2^2}$	0.025	0.3535534
$\frac{h_0}{2^3}$	0.0125	0.3535534
$\frac{h_0}{2^4}$	0.00625	0.3535534

また  $R^{(1)}(h)$  として、

$$R^{(1)}(h) \equiv \frac{M_h^{(1)} - M_{\frac{h}{2}}^{(1)}}{M_{\frac{h}{2}}^{(1)} - M_{\frac{h}{2^2}}^{(1)}}$$

とすると

$$R^{(1)}(h_0) = 16.023235$$

$$R^{(1)}\left(\frac{h_0}{2}\right) = 16.002108$$

$$R^{(1)}\left(\frac{h_0}{2^2}\right) = 16.113195$$

ところで、 $M_h^{(1)} = \frac{4M_{\frac{h}{2}} - M_h}{3}$  であるから

$$\begin{aligned} M_h^{(1)} - M_{\frac{h}{2}}^{(1)} &= -\frac{\beta}{4}h^4 + \frac{\beta}{4}\left(\frac{h}{2}\right)^4 + O(h^6) \\ &= \frac{15}{64}\beta h^4 + O(h^6) \end{aligned}$$

よって

$$R^{(1)}(h) = \frac{\frac{15}{64}\beta h^4 + O(h^6)}{\frac{15}{64}\beta \left(\frac{h}{2}\right)^4 + O(h^6)}$$

表 4 推定誤差と実際の誤差

	$h$	推定誤差	実際の誤差	2つの誤差の差
$\frac{h_0}{2^2}$	0.025	1.892D-09	1.889D-09	2.788D-12
$\frac{h_0}{2^3}$	0.0125	1.181D-10	1.180D-10	4.495D-14
$\frac{h_0}{2^4}$	0.00625	7.378D-12	7.349D-12	2.940D-14
$\frac{h_0}{2^5}$	0.003125	4.579D-13	4.803D-13	2.243D-14

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{h^4}{\left(\frac{h}{2}\right)^4} \\ &= 16 \end{aligned}$$

となる。よって  $h$  が十分小さい場合は  $R^{(1)}(h) \simeq 16$ 。これは計算結果と比べるとほぼ等しい値となっている。(上で  $R^{(1)}(h)$  が単調に減少していないのは丸め誤差の影響だろう。)

(5)

(3) より

$$\begin{aligned} M_h^{(1)} - M_{\frac{h}{2}}^{(1)} &= \{M_h^{(1)} - f'(1)\} - \{M_{\frac{h}{2}}^{(1)} - f'(1)\} \\ &\simeq 16\{M_{\frac{h}{2}}^{(1)} - f'(1)\} - \{M_{\frac{h}{2}}^{(1)} - f'(1)\} \\ &= 15\{M_{\frac{h}{2}}^{(1)} - f'(1)\} \end{aligned}$$

したがって、推定誤差は

$$M_{\frac{h}{2}}^{(1)} - f'(1) \simeq \frac{1}{15}\{M_h^{(1)} - M_{\frac{h}{2}}^{(1)}\}$$

これより、推定誤差が計算できる。推定誤差と実際の誤差を計算したものが表 4 である。そして、表 4 より分かるが、2つの誤差の差は小さい。(  $h_0$  は 10 の-2 乗のオーダーであるが、誤差の差は 10 の-12 乗のオーダーである。)

### 問 3

$$\frac{dy}{dx} = -3xy, \quad y(0) = 1, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

(1)

問題の微分方程式を初めの刻み幅  $h_0 = 1/2$  とし  $x = 1$  での数値解を、古典的 Runge-Kutta 法を用いて計算した。表 5 はその結果である。また、解析解  $y(1) = e^{-\frac{3}{2}} = 0.2231302\dots$  との差  $E_h = |R_h - e^{-\frac{3}{2}}|$  もあわせて表 5 に示した。

表 5  $R_h$  の計算結果

	$h$	$R_h$	$E_h$
$h_0$	0.5	0.2264388	0.0033086
$\frac{h_0}{2}$	0.25	0.2234825	0.0003533
$\frac{h_0}{2^2}$	0.125	0.2231512	0.0000210
$\frac{h_0}{2^3}$	0.0625	0.2231314	0.0000012
$\frac{h_0}{2^4}$	0.03125	0.2231302	7.470D-08
$\frac{h_0}{2^5}$	0.015625	0.2231302	4.580D-09
$\frac{h_0}{2^6}$	0.0078125	0.2231302	2.834D-10

(2)

古典的 Runge-Kutta 法は 4 次の公式なので,  $\gamma$  をある定数として

$$R_h = y(1) + \gamma h^4 + O(h^5)$$

と表せる、よって

$$R_h - R_{\frac{h}{2}} = \frac{3}{4}\gamma h^4 + O(h^5)$$

なので、 $h$  が十分小さいとき

$$\frac{R_h - R_{\frac{h}{2}}}{R_{\frac{h}{2}} - R_{\frac{h}{2^2}}} \simeq \frac{\frac{3}{4}\gamma h^4}{\frac{3}{4}\gamma \left(\frac{h}{2}\right)^4} = 16$$

実際

$$L_h = \frac{R_h - R_{\frac{h}{2}}}{R_{\frac{h}{2}} - R_{\frac{h}{2^2}}}$$

として、 $L_{h_0}$  を計算すると、 $L_{h_0} = 8.8940288\dots$  となる。16 と比べると、オーダーは同じだが、予想通りの結果とは言えない。しかし、次に見るように  $h$  の値が小さければ  $L_h$  は 16 とほぼ等しくなる。

(3)

$\frac{h_0}{2}, \frac{h_0}{2^2}, \frac{h_0}{2^3}, \dots$  について  $L_h$  を計算した。その結果を表 6 に示した。その表より  $h$  が小さくなると  $L_h$  の値は 16 に近づいていることが分かる。

表 6  $L_h$  の計算結果

	$h$	$L_h$
$h_0$	0.5	8.8940288
$\frac{h_0}{2}$	0.25	16.792436
$\frac{h_0}{2^2}$	0.125	16.998869
$\frac{h_0}{2^3}$	0.0625	16.601151
$\frac{h_0}{2^4}$	0.03125	16.320938