土曜講座　数学問題演習　第三回

2006 年 6 月 3 日

1

正六角形 ABCDEF において、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とおく。このとき、次の各ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ 表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　(5) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

2

平行四辺形 OABC において、BC を 2:1 に内分する点を D,OA を 4:1 に外分する点を E、DE と AB の交点を F とするとき、次のベクトルを、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ。

(1)$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$　(2)$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$　(3)$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$

3

△OAB の辺 OA,OB 上に点 C,D を、OC:CA=1:2,OD:DB=2:1 となるようにとり、AD と BC の交点を E とするとき、次の問いに答えよ。

(1)AE:ED=s:1-s とおいて、$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $s, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(2)BE:EC=t:1-t とおいて、$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $s, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

4

(1) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が $|\vec{a}+\vec{b}| = 6, |\vec{a}-\vec{b}| = 2, |\vec{b}| = 3$ をみたすとき、内積 $(\vec{a}, \vec{b})$ を求めよ。また、$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする t の値を求めよ。

(2) 定点 O を中心とする半径 2 の円周上に定点 A,B がある。すべての実数 t について $|(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2t\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \geq 2$ が成り立つとき、内積 $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}})$ の値を求めよ。

5

平面上で、点 P を通りベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線を l とする。ただし、$\vec{n}$ は零ベクトルでないとする。このとき、l 上にない点 A から l に下ろした垂線の足を H とし、3 点 P,A,H の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}, \vec{a}, \vec{h}$ とする。

(1) 内積について,$\vec{n} \cdot \vec{h} = \vec{n} \cdot \vec{p}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 実数 t を用いて、$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\vec{n}$ とおける。このとき、t を $\vec{p}, \vec{a}, \vec{n}$ で表せ。

(3) 線分 AH の長さを $\vec{p}, \vec{a}, \vec{n}$ で表せ。

6

$\triangle$OAB と正の定数 k が与えられている。動点 P,Q は a, b を実数として、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = b\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{k}$$

をみたしている。直線 PQ は定点を通ることを示せ。その定点を R とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, k$ で表せ。