

土曜講座 数学問題演習 第一回

2006年5月20日

1

- (1) $pq - p - 2p + 2$ を因数分解せよ。
(2) $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす整数の組 (p, q) を求めよ。

2

次の各式が x についての恒等式となるような定数 a, b, c の値を求めよ。

- (1) $x^3 + ax + b = (x - 1)^2(x + c)$
(2) $a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c = 2x^2 - 3x + 4$

3

- (1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき $\frac{a+c}{b+d} = \frac{ad+bc}{2bd}$ が成り立つことを示せ。
(ただし、 $b > 0, d > 0$ とする。)
(2) $a + b + c = 0$ のとき、 $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$ であることを示せ。

4

n を自然数とすると、 $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 で割り切れることを証明せよ。

5

$2x + 3y$ が 17 で割り切れるような整数 x, y の組 (x, y) 全体の集合と、
 $9x + 5y$ が 17 で割り切れるような整数の組 (x, y) 全体の集合は等しいことを証明せよ。

6

$f(x) - 2$ は $(x - 1)^2$ で割り切れ、
 $f(x) + 2$ は $(x + 1)^2$ で割り切れる
ような整式 $f(x)$ のうちで、次数が最も小さいものを求めよ。

7

$f(x)$ は x の整式で $f(x) = f(1 - x)$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数は偶数であることを証明せよ。

(2) $f(x) - f(0) = x(x - 1)g(x)$ となる $g(x)$ が存在することを証明せよ。

(3) $f(x)$ は $x(x - 1)$ の整式であることを証明せよ。

Hint

1,2,3,7 → 無し

4 → 数学的帰納法

5 → $2x + 3y = 17n$ とおくと...

6 → ある整式が $(x - a)^2$ で割り切れる条件とは？